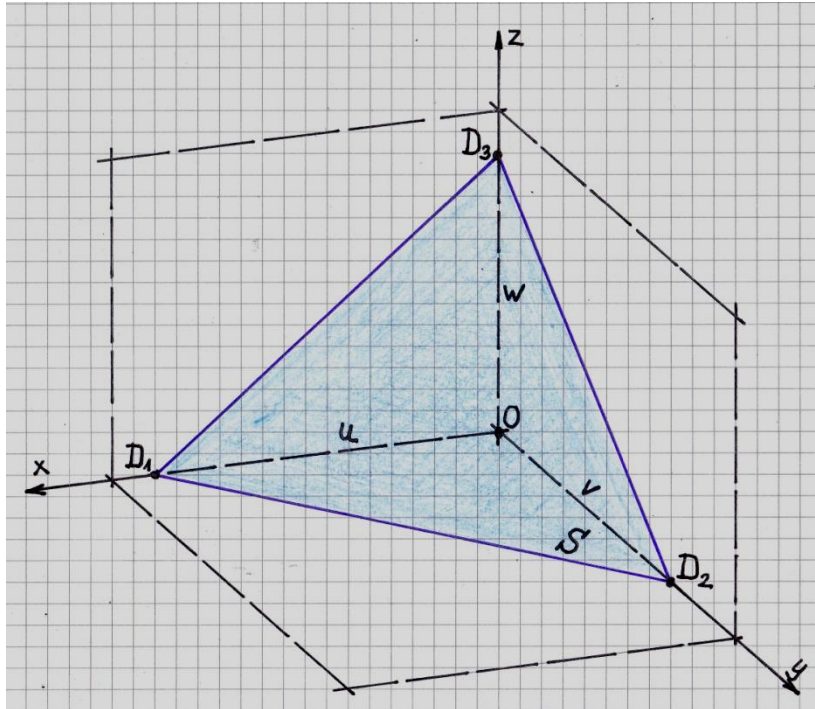


Egy sík és a koordinátságok metszészonalainak meghatározása

Ehhez tekintsük az 1. ábrát!



1. ábra

Itt az (u, v, w) tengelymetszeteivel adott S síkot látjuk, az $Oxyz$ térbeli derékszögű koordináta - rendszerben elhelyezve. A tengelymetszeteivel adott általános helyzetű sík egyenlete – [1] – :

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1, \quad (1)$$

ahol (x, y, z) a sík egy tetszőleges P pontjának koordinátái.

Ezután a címbeli feladat megoldása a következők szerinti:

~ az S sík és az

$$x = 0 \quad (a)$$

egyenletű (yz) koordinátságok metszészonalának egyenlete (1) és (a) - val:

$$\frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1; \quad (2)$$

~ az S sík és az

$$y = 0 \quad (b)$$

egyenletű (xz) koordinátságok metszészonalának egyenlete (1) és (b) - vel:

$$\frac{x}{u} + \frac{z}{w} = 1; \quad (3)$$

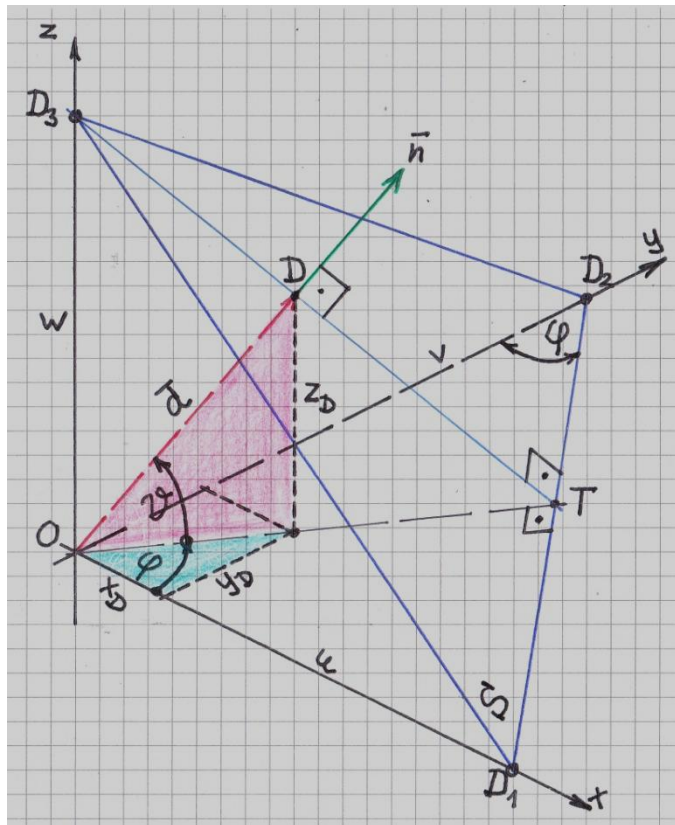
$\sim$ az S sík és a

$$z = 0 \quad (c)$$

egyenletű (xy) koordinátasík metszéspontjának egyenlete (1) és (c) - vel:

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1. \quad (4)$$

Ezzel a kitűzött feladatunkat már meg is oldottuk. Persze, adja magát a kérdés, hogy bizonyos feltételek fennállása esetén hogyan választandó az (u, v, w) számhármasság. Most erről lesz szó. Ehhez tekintsük a 2. ábrát is!



2. ábra

Itt azt látjuk, hogy az S síkot a D pontján áthaladó $\mathbf{d} \parallel \mathbf{n}$ normálvektorával adtuk meg.

A $\mathbf{d}$ vektor egyenlete:

$$\mathbf{d} = x_D \cdot \mathbf{i} + y_D \cdot \mathbf{j} + z_D \cdot \mathbf{k}, \quad (5)$$

ahol $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ az x, y, z tengely menti egységvektorok. Továbbá a 2. ábra alapján a D dőfés - pont koordinátái a (d, ϑ, φ) térbeli polárkoordinátákkal kifejezve:

$$x_D = d \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi, \quad (6/1)$$

$$y_D = d \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi, \quad (6/2)$$

$$z_D = d \cdot \sin \vartheta, \quad (6/3)$$

$$d = |\mathbf{d}|. \quad (6/4)$$

Most fejezzük ki a tengelymetszeteket a **D** pont polárkoordinátáival! Ekkor a 2. ábra alapján felírhatjuk, hogy

$$d = u \cdot \cos \varphi \cdot \cos \vartheta, \quad (7/1)$$

$$d = v \cdot \sin \varphi \cdot \cos \vartheta, \quad (7/2)$$

$$d = w \cdot \sin \vartheta. \quad (7/3)$$

Majd a (7) egyenletekből átrendezéssel a tengelymetszetek kifejezései:

$$u = \frac{d}{\cos \varphi \cdot \cos \vartheta}, \quad (8/1)$$

$$v = \frac{d}{\sin \varphi \cdot \cos \vartheta}, \quad (8/2)$$

$$w = \frac{d}{\sin \vartheta}. \quad (8/3)$$

Ezután ismét a (7) egyenletekből:

$$\cos \varphi \cdot \cos \vartheta = \frac{d}{u}, \quad (9/1)$$

$$\sin \varphi \cdot \cos \vartheta = \frac{d}{v}, \quad (9/2)$$

$$\sin \vartheta = \frac{d}{w}. \quad (9/3)$$

Most a (6) és a (9) képletekkel:

$$x_D = d \cdot \frac{d}{u} = \frac{d^2}{u}, \quad (10/1)$$

$$y_D = d \cdot \frac{d}{v} = \frac{d^2}{v}, \quad (10/2)$$

$$z_D = d \cdot \frac{d}{w} = \frac{d^2}{w}. \quad (10/3)$$

Majd a térbeli Pitagorász - tétellel:

$$d^2 = x_D^2 + y_D^2 + z_D^2, \quad (11)$$

ezután pedig a (10) és (11) képletekkel:

$$d^2 = \left(\frac{d^2}{u}\right)^2 + \left(\frac{d^2}{v}\right)^2 + \left(\frac{d^2}{w}\right)^2, \text{ innen:}$$

$$1 = \frac{d^2}{u^2} + \frac{d^2}{v^2} + \frac{d^2}{w^2} \rightarrow \frac{1}{d^2} = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2} \rightarrow \frac{1}{d} = \sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}}, \text{ innen pedig:}$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}}}. \quad (12)$$

Ez a képlet képsík origótól mért távolságának a kifejezése a tengelymetszetekkel.

Most (7 / 1) és (7 / 2) szerint:

$$u \cdot \cos \varphi \cdot \cos \vartheta = v \cdot \sin \varphi \cdot \cos \vartheta \rightarrow u \cdot \cos \varphi = v \cdot \sin \varphi \rightarrow \frac{u}{v} = \operatorname{tg} \varphi, \text{ tehát:}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{u}{v} \rightarrow \underline{\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{u}{v} \right)}. \quad (13)$$

Majd (9 / 3) - mal:

$$\sin \vartheta = \frac{d}{w} \rightarrow \underline{\vartheta = \arcsin \left(\frac{d}{w} \right)}. \quad (14)$$

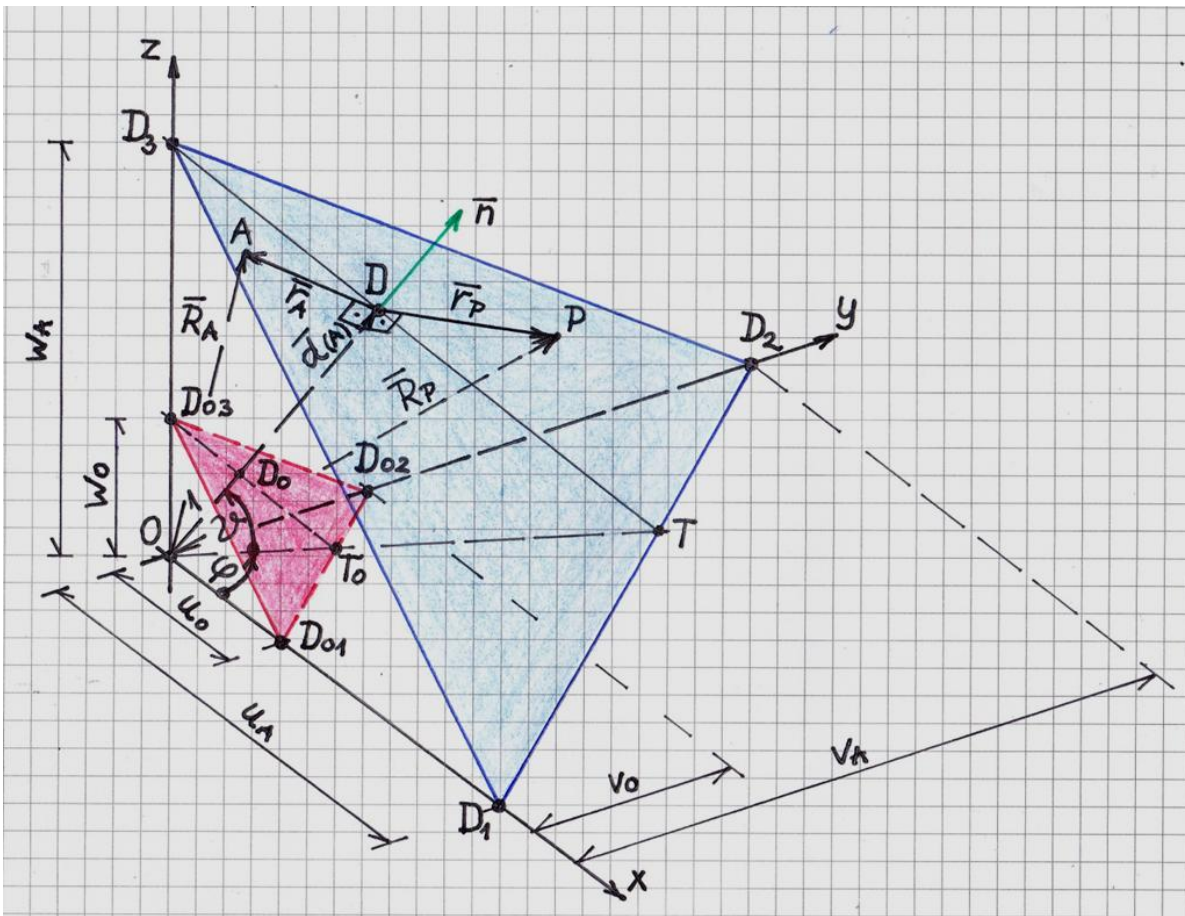
A (11), (12) és (13) képletek adják meg a kapcsolatokat a tengelymetszetek és a **D** pont polárkoordinátái közt.

Most fogalmazzuk át feladatunkat!

Adott: az **A** (x_A, y_A, z_A) ponton áthaladó, **n**(1, φ, ϑ) normális egységvektorú **S** sík.

Keresett: az **S** sík és a koordinátasíkok metszésvonalainak egyenletei.

A szemléletes megoldáshoz tekintsük a 3. ábrát is!



3. ábra

Itt azt látjuk, hogy először felvettük az $\mathbf{n}$ normálvektor $\mathbf{O}$ - n áthaladó egyenesét a (φ, ϑ) szögekkel. Ezután felvettük rajta a $\mathbf{D}_0$ pontot, amellyel $\mathbf{OD}_0 = 1$. Látjuk, hogy az ehhez tartozó $\mathbf{S}_0 = (\mathbf{D}_{01} \mathbf{D}_{02} \mathbf{D}_{03})$ sík nem megy át az adott $\mathbf{A}$ ponton. Hogy ez bekövetkezzen, a síkot normális egyenesén el kell tolnunk a $\mathbf{D}$ pontig. Ennek helyvektorára fennáll, hogy $\mathbf{d}_{(A)} = d_A \cdot \mathbf{n}(\varphi, \vartheta)$, ahol $d_A = \mathbf{OD}$. Az $\mathbf{A}$ ponton átmenő $\mathbf{S} = (\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2 \mathbf{D}_3)$ síkra fennáll, hogy

$$\sim \mathbf{u} = \mathbf{u}_A, \mathbf{v} = \mathbf{v}_A, \mathbf{w} = \mathbf{w}_A;$$

$\sim \mathbf{d}_{(A)} \perp \mathbf{r}_A$, ami a vektorok skaláris szorzatát felhasználva így fogalmazható meg:

$$\mathbf{d}_{(A)} \cdot \mathbf{r}_A = 0. \quad (15)$$

Mivel a 3. ábráról leolvashatóan

$$\mathbf{R}_A = \mathbf{d}_{(A)} + \mathbf{r}_A \rightarrow \mathbf{r}_A = \mathbf{R}_A - \mathbf{d}_{(A)}, \quad (16)$$

így (15) és (16) szerint:

$$\mathbf{d}_{(A)} \cdot (\mathbf{R}_A - \mathbf{d}_{(A)}) = 0. \quad (17)$$

(17) - et kifejtve:

$$\mathbf{d}_{(A)} \cdot \mathbf{R}_A - \mathbf{d}_{(A)} \cdot \mathbf{d}_{(A)} = 0, \text{ innen:}$$

$\mathbf{d}_{(A)} \cdot \mathbf{R}_A = \mathbf{d}_{(A)} \cdot \mathbf{d}_{(A)}$; tovább alakítva, a skaláris szorzás szabályai szerint:

$$x_D \cdot x_A + y_D \cdot y_A + z_D \cdot z_A = d_{(A)}^2; \quad (18)$$

majd (10) és (18) szerint:

$$\frac{d_{(A)}^2}{u_A} \cdot x_A + \frac{d_{(A)}^2}{v_A} \cdot y_A + \frac{d_{(A)}^2}{w_A} \cdot z_A = d_{(A)}^2; \text{ egyszerűsítve:}$$

$$\frac{x_A}{u_A} + \frac{y_A}{v_A} + \frac{z_A}{w_A} = 1. \quad (19)$$

Az $\mathbf{A}$ ponton átmenő sík tetszőleges $\mathbf{P}$ pontjának koordinátái kielégítik a fentiekhez teljesen hasonló módon nyerhető

$$\frac{x_P}{u_A} + \frac{y_P}{v_A} + \frac{z_P}{w_A} = 1 \quad (20)$$

egyenletet. Most az $\mathbf{A}$ ponton átmenő, $\mathbf{n}(\varphi, \vartheta)$ normálvektorú sík tengelymetszeteire a (8) képletek szerint írhatjuk, hogy

$$u_A = \frac{d_{(A)}}{\cos \varphi \cdot \cos \vartheta}, \quad (21 / 1)$$

$$v_A = \frac{d_{(A)}}{\sin \varphi \cdot \cos \vartheta}, \quad (21 / 2)$$

$$w_A = \frac{d_{(A)}}{\sin \vartheta} . \quad (21 / 3)$$

Majd (19) és (21) - gyel:

$$\frac{\frac{x_A}{d_{(A)}}}{\cos \varphi \cdot \cos \vartheta} + \frac{\frac{y_A}{d_{(A)}}}{\sin \varphi \cdot \cos \vartheta} + \frac{\frac{z_A}{d_{(A)}}}{\sin \vartheta} = 1 , \text{ innen:}$$

$$d_{(A)} = x_A \cdot \cos \varphi \cdot \cos \vartheta + y_A \cdot \sin \varphi \cdot \cos \vartheta + z_A \cdot \sin \vartheta . \quad (22)$$

Ezután (20) és (21) - gyel:

$$\frac{\frac{x_P}{d_{(A)}}}{\cos \varphi \cdot \cos \vartheta} + \frac{\frac{y_P}{d_{(A)}}}{\sin \varphi \cdot \cos \vartheta} + \frac{\frac{z_P}{d_{(A)}}}{\sin \vartheta} = 1 , \text{ innen:}$$

$$d_{(A)} = x_P \cdot \cos \varphi \cdot \cos \vartheta + y_P \cdot \sin \varphi \cdot \cos \vartheta + z_P \cdot \sin \vartheta . \quad (23)$$

Most (22) és (23) bal oldalainak egyenlőségéből adódik jobb oldalaik egyenlősége:

$$x_P \cdot \cos \varphi \cdot \cos \vartheta + y_P \cdot \sin \varphi \cdot \cos \vartheta + z_P \cdot \sin \vartheta =$$

$$= x_A \cdot \cos \varphi \cdot \cos \vartheta + y_A \cdot \sin \varphi \cdot \cos \vartheta + z_A \cdot \sin \vartheta , \text{ innen rendezéssel:}$$

$$\cos \varphi \cdot \cos \vartheta \cdot (x_P - x_A) + \sin \varphi \cdot \cos \vartheta \cdot (y_P - y_A) + \sin \vartheta \cdot (z_P - z_A) = 0 . \quad (24)$$

(24) - et tovább rendezve:

$$z_P - z_A = -\frac{1}{\sin \vartheta} \cdot [\cos \varphi \cdot \cos \vartheta \cdot (x_P - x_A) + \sin \varphi \cdot \cos \vartheta \cdot (y_P - y_A)] , \text{ innen:}$$

$$z_P = z_A - \frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta} \cdot [\cos \varphi \cdot (x_P - x_A) + \sin \varphi \cdot (y_P - y_A)] . \quad (25)$$

A (25) egyenlet az **A** ponton átmenő, **n**(φ , ϑ) normálvektorú sík pontjainak egyenlete, vagyis $z_P = f(\varphi, \vartheta, x_A, y_A, z_A; x_P, y_P)$.

Az **S** sík és a koordinátságok metszéspontjainak egyenletei (20) - ból:

~ az **S** sík és az **x** = **0** egyenletű (**yz**) koordinátságok metszéspontjának egyenlete:

$$\frac{y}{v_A} + \frac{z_1}{w_A} = 1 ; \quad (26 / 1)$$

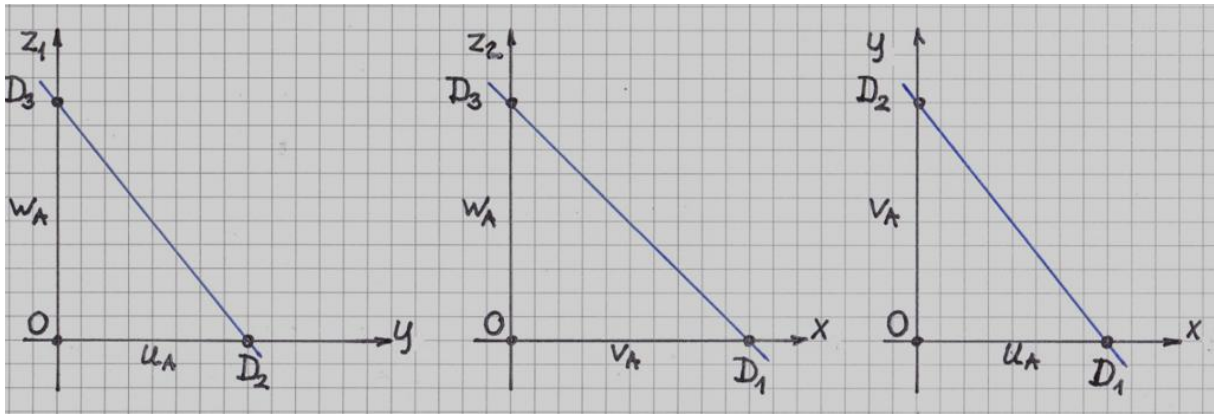
~ az **S** sík és az **y** = **0** egyenletű (**xz**) koordinátságok metszéspontjának egyenlete:

$$\frac{x}{u_A} + \frac{z_2}{w_A} = 1 ; \quad (26 / 2)$$

~ az **S** sík és az **z** = **0** egyenletű (**xy**) koordinátságok metszéspontjának egyenlete:

$$\frac{x}{u_A} + \frac{y}{v_A} = 1 . \quad (26 / 3)$$

A kicsit módosított jelölésekkel felírt (26) egyenletekhez lásd a 4. ábrát is!



4. ábra

A (26) egyenletek átrendezésével kapjuk, hogy

$$z_1 = w_A \cdot \left(1 - \frac{y}{v_A}\right), \quad z_1 = w_A - \frac{w_A}{v_A} \cdot y; \quad (27 / 1)$$

$$z_2 = w_A \cdot \left(1 - \frac{x}{u_A}\right), \quad z_2 = w_A - \frac{w_A}{u_A} \cdot x; \quad (27 / 2)$$

$$y = v_A \cdot \left(1 - \frac{x}{u_A}\right), \quad y = v_A - \frac{v_A}{u_A} \cdot x. \quad (27 / 3)$$

Most (21 / 2), (21 / 3) és (27 / 1) - gyel:

$$z_1 = \frac{d_{(A)}}{\sin \vartheta} - \frac{\frac{d_{(A)}}{\sin \vartheta}}{\frac{d_{(A)}}{\sin \vartheta \cdot \cos \vartheta}} \cdot y = \frac{d_{(A)}}{\sin \vartheta} - \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \cdot y, \quad (28 / 1)$$

majd (22) és (28 / 1) - gyel:

$$z_1 = \frac{x_A \cdot \cos \varphi \cdot \cos \vartheta + y_A \cdot \sin \varphi \cdot \cos \vartheta + z_A \cdot \sin \vartheta}{\sin \vartheta} - \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \cdot y, \text{ vagy más alakba írva:}$$

$$z_1 = \frac{\cos \vartheta (x_A \cdot \cos \varphi + y_A \cdot \sin \varphi) + z_A \cdot \sin \vartheta}{\sin \vartheta} - \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \cdot y = \left(\frac{x_A \cdot \cos \varphi + y_A \cdot \sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} + z_A \right) - \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \cdot y,$$

tehát:

$$z_1 = \frac{x_A \cdot \cos \varphi + y_A \cdot \sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} + z_A - \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \cdot y. \quad (29 / 1)$$

Majd (21 / 1), (21 / 3) és (27 / 2) - vel:

$$z_2 = \frac{d_{(A)}}{\sin \vartheta} - \frac{\frac{d_{(A)}}{\sin \vartheta}}{\frac{d_{(A)}}{\cos \varphi \cdot \cos \vartheta}} \cdot x = \frac{d_{(A)}}{\sin \vartheta} - \frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \cdot x, \quad (28 / 2)$$

most (22) és (28 / 2) - vel, felhasználva a (29 / 1) előtti zárójeles kifejezést is:

$$z_2 = \frac{x_A \cdot \cos \varphi + y_A \cdot \sin \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} + z_A - \frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta} \cdot x. \quad (29 / 2)$$

Ezután (21 / 1), (21 / 2) és (27 / 3) szerint:

$$y = \frac{d_{(A)}}{\sin \varphi \cdot \cos \vartheta} - \frac{\frac{d_{(A)}}{\sin \varphi \cdot \cos \vartheta}}{\frac{d_{(A)}}{\cos \varphi \cdot \cos \vartheta}} \cdot x = \frac{d_{(A)}}{\sin \varphi \cdot \cos \vartheta} - \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot x, \quad (28 / 3)$$

majd (22) és (28 / 3) - mal:

$$y = \frac{x_A \cdot \cos \varphi \cdot \cos \vartheta + y_A \cdot \sin \varphi \cdot \cos \vartheta + z_A \cdot \sin \vartheta}{\sin \varphi \cdot \cos \vartheta} - \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot x, \text{ vagy más alakba írva:}$$

$$y = \frac{x_A}{\operatorname{tg} \varphi} + y_A + z_A \cdot \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\sin \varphi} - \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot x. \quad (29 / 3)$$

A (29) képletekkel előálltak a

$$z_1 = f_1(\varphi, \vartheta, x_A, y_A, z_A; y), \quad z_2 = f_2(\varphi, \vartheta, x_A, y_A, z_A; x),$$

$$y = f_3(\varphi, \vartheta, x_A, y_A, z_A; x)$$

keresett függvénykapcsolatok, mint a mondott síkok metszésvonalainak egyenletei.

Megjegyzések:

M1. A [2] munkában a 45. oldalon úgy fogalmaznak, hogy

„ A síkot meghatározza egy pont és egy, a síkra merőleges vektor – az úgynevezett normálvektor – vagy két egymást metsző egyenes, vagy két párhuzamos egyenes, vagy egy pont és egy rá nem illeszkedő egyenes, vagy három nem egy egyenesen levő pont.

E meghatározások közül az első a legáltalánosabb, mert erre a többi eset visszavezethető.”

Ezért is építettük fel számításunkat úgy (is), hogy adott a sík meghatározására annak egy A pontja és $\mathbf{n} \parallel \mathbf{d}$ normálvektora.

M2. Esetünkben a (d, φ, ϑ) polárkoordinátákra általában fennáll – v. ö. [1] – , hogy

$$0 < d < \infty, \quad -\pi < \varphi \leq \pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$

A $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ eset megengedése (8) szerint az $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{w}$ következményeket vonja maga után.

M3. A $\mathbf{d}_{(A)}$ jelöléssel is kifejezésre kívántuk juttatni, hogy ez a vektor nem az A pont, hanem az A ponton átmenő és $\mathbf{n}$ normális egységvektorú S síkhoz tartozó D dőféspont $\mathbf{d}_{(A)} = d_A \cdot \mathbf{n}(1, \varphi, \vartheta)$ helyvektora.

M4. A (19) - re vezető számítás egyben az (1) összefüggés igazolása is.

M5. Most alakítsuk tovább a (14) egyenletet! Ekkor(12) - vel is :

$$\sin \vartheta = \frac{d}{w} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}}} = \frac{1}{|w| \cdot \operatorname{sgn}(w)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}}} = \frac{1}{\operatorname{sgn}(w)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{w^2}{u^2} + \frac{w^2}{v^2} + 1}}, \text{ tehát}$$

$$\vartheta = \arcsin \left[\operatorname{sgn}(w) \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{w}{u}\right)^2 + \left(\frac{w}{v}\right)^2 + 1}} \right]. \quad (14 / 1)$$

Idevéve még a (13) szerinti

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{u}{v} \right) \quad (13)$$

kifejezését is, megállapíthatjuk, hogy a (φ, ϑ) adatkár megadásához nem kell a három tengelymetszet - adat, hanem csak a belőlük képzett két arány; ugyanis (13) - ban és (14 / 1) - ben ilyen arányok szerepelnek. Valóban, a két szükséges mennyiség: $\frac{w}{u}$ és $\frac{w}{v}$, hiszen belőlük képezhető a $\frac{\frac{w}{v}}{\frac{w}{u}} = \frac{u}{v}$ arány is, vagyis (13) így is írható:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\frac{w}{v}}{\frac{w}{u}} \right). \quad (13 / 1)$$

Viszont (12) szerint is a **d** mennyiség megadásához már mind a három tengelymetszeti adatra szükség van. Vagyis az (**u, v, w**) adathármas megadásával nem csak a sík állása, hanem a pontos térbeli helyzete is rögzítve van, ahogyan az a 3. ábráról is leolvasható.

M6. A 2. ábrán szemléltetett esetet úgy is felfoghatjuk, hogy az **OD = d = konst.** sugárral gömböt „rajzolunk”, melynek az **S** sík az érintősíkja. A gömb középpontja **O**, érintési pontja **D**. Ez az elgondolás segíthet egy felvett geometriai helyzet jobb elképzelésében.

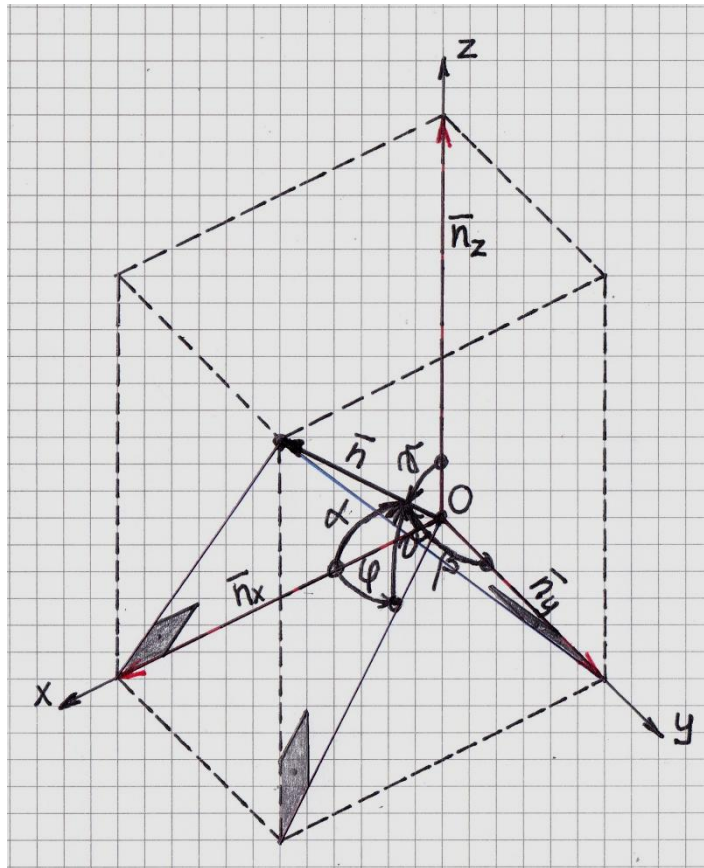
M7. A (27) egyenletek a 4. ábra alapján közvetlenül is felírhatóak.

M8. A (29) egyenletek közvetlenül (25) - ből is nyerhetők.

M9. A (25) egyenletben elhagyhatjuk a „**P**” indexet, mert már nem okozhat félreértést, hogy csak a sík pontjai elégítik ki; **x** és **y** felvételével **z** számítható belőle:

$$z(x, y) = z_A - \frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta} \cdot [\cos \varphi \cdot (x - x_A) + \sin \varphi \cdot (y - y_A)]. \quad (25 *)$$

M 10. A térbeli jellemző szögek közötti további összefüggéseket írhatunk fel – 5. ábra.



5. ábra

Eszerint a normális egységvektor koordinátáira fennáll, hogy

$$n_x = 1 \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi = 1 \cdot \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \cos \varphi \cdot \cos \vartheta ;$$

$$n_y = 1 \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi = 1 \cdot \cos \beta \rightarrow \cos \beta = \sin \varphi \cdot \cos \vartheta ;$$

$$n_z = 1 \cdot \sin \vartheta = 1 \cdot \cos \gamma \rightarrow \cos \gamma = \sin \vartheta .$$

Irodalom:

[1] – **I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev**: Matematikai zsebkönyv
2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.

[2] – **Pach Zs. Pálné ~ Frey Tamás**: Vektor - és tenzoranalízis
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1960.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
mérnöktanár

Sződliget, 2014. 11. 02.